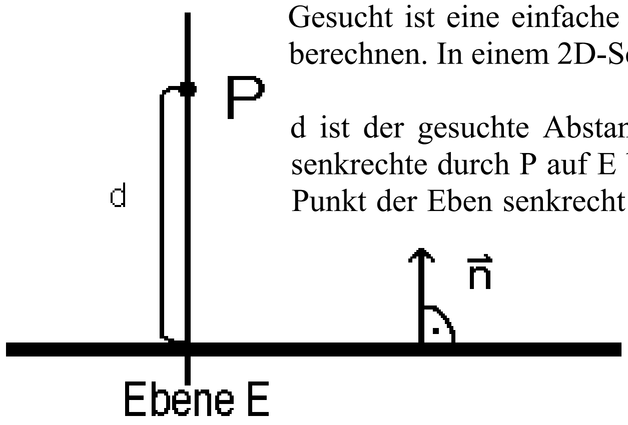
3M
KHJ 13/1

24.10.2002
Stefan Schorsch

Die Hesseform der Ebenengleichung

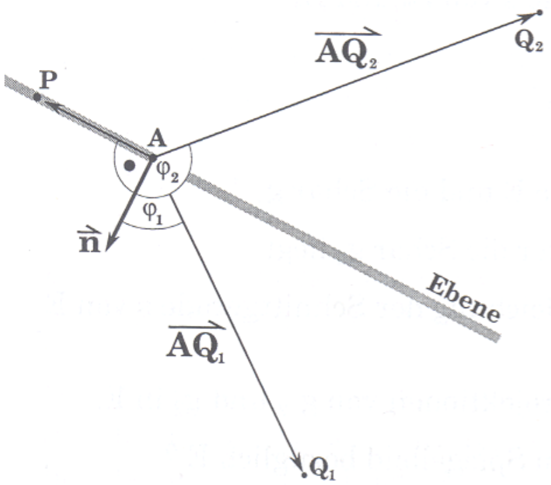
Idee & Herleitung:

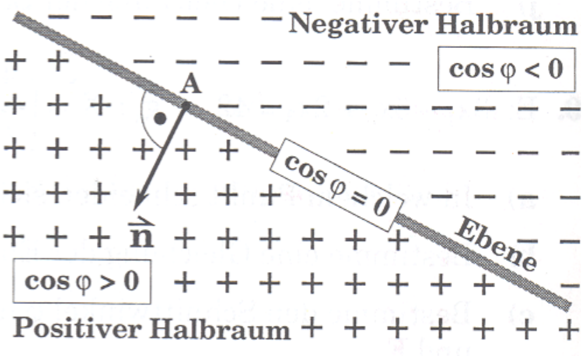


Gesucht ist eine einfache Methode den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu berechnen. In einem 2D-Schema:

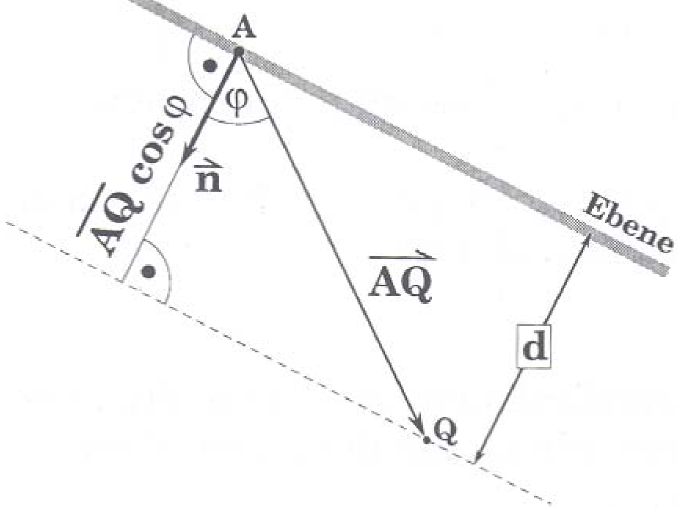
d ist der gesuchte Abstand des Punktes P zur Ebene E. Dieser wird durch eine senkrechte durch P auf E berechnet. Es liegt nahe, den Normalvektor der in jedem Punkt der Eben senkrecht auf ihr steht in den Lösungsweg einzubeziehen. Schnell stößt man hier aber auf ein Problem: Zeigt der Normalvektor in Richtung der „entgegengesetzten Seite" der Eben als P, so würde man nicht den Abstand sondern den doppelten Abstand berechnen. Um dem Problem entgegenwirken zu können, muss die Ebene also zunächst orientiert werden.

Dazu ein Beispiel:
E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$
Setzt man hier die Punkte P(2|2|-6), Q_1 (3|-2|-2) und Q_2 (-8|6|-5) ein erhält man: E(P) = 0 (der Punkt liegt in der Ebene), $E(Q_1) = +\,18$ und $E(Q_2) = -\,27$
Was bedeuten also diese Vorzeichen?
In der Normalform der Ebene E:
E: n ° (X – A) = 0 ➔ n ° AX = 0 ➔ E(X) = n * AX * cosφ wobei φ = (n; AX)
Deutlicher wird dies in einer Zeichnung:





cosφ legt also das Vorzeichen von E(X) fest und teilt damit indirekt den Raum in einen positiven und einen negativen Halbraum. Ist cosφ > 0 befindet man sich im positiven Halbraum und analog cosφ < 0 im negativen. Die Ebene heißt nun orientiert. Um sie richtig zu orientieren hat man sich auf folgende Definition festgelegt: Wenn die Ebene nicht durch den Ursprung geht soll sie so orientiert werden, dass der Normalvektor der Eben vom Ursprung weg zeigt, d.h.: gilt E(0) < 0 ist die Ebene richtig orientiert. In unserem Beispiel ist E(0) = 6, die Ebene ist also falsch orientiert. Durch Multiplikation mit –1 erhält man:
E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$ und damit E(0) = -6 < 0 ➔ die Bedingung ist erfüllt.



Die Bedeutung des Vorzeichens von E(X) ist nun bekannt, nicht aber die Bedeutung des Betrags |E(X)| :
|E(Q)| = |n ° AX| = n * AX * | cosφ| Aus der Zeichnung 3 kann man ablesen:

AX * |cosφ| = d also unser gesuchter Abstand. ➔ |E(X)| = n * d
Um das noch störende n auszugleichen kann man z.B. den Einheitsvektor n in der Ebenengleichung verwenden. Setzt man dann einen Punkt in die Gleichung ein, erhält man sofort den richtigen Abstand. Diesen Zusammenhang erkannte Ludwig Otto Hesse (1811-1874), ihm zu ehren heißt diese Gleichungsform auch Hesse-Form oder Hesse-Normal-Form (HNF).

An unserem Beispiel:
E: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 6 = 0$ ➔ Umorientierung: E: $-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6 = 0$

$n = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$ ➔ HNF: $\frac{1}{3}\left(-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6\right) = 0$

Für die Beispielpunkte: $E_H(0) = -2$ ➔ Die Ebene hat den Abstand 2 vom Ursprung
$E_H(Q_1) = -6$ ➔ Die Ebene hat den Abstand 2 von Q_1
$E_H(Q_2) = +9$ ➔ Die Ebene hat den Abstand 9 von Q_2

Regel:

Um die Hesse-Normal-Form aus einer Ebenengleichung zu erzeugen ist diese durch den Betrag des Normalvektors zu dividieren. Das Vorzeichen ist so zu setzen, dass n_0 (falls vorhanden) negativ ist.

Zusammenfassung:

Von E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ ist

E_H: $\frac{-\operatorname{sgn}(n_0)}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$

mit $n_0 \neq 0$ und $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

die **Hesse-Form** der Ebene E.

Ist $n_0 = 0$, dann sind $\pm\frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0) = 0$
die beiden Hesse-Formen der Ebene E.

Abstand Punkt-Ebene: $d(Q,E) = |E_H(Q)|$

Aufgaben:

1. Gesucht: Abstand des Ursprungs, A(12|2|-2) und B(1|0|-2) von E: $x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 9 = 0$
2. Gesucht: HNF von Ebene E die durch A(1|1|5), B(9|1|1) und C(11|4|-1) geht.
3. Bestimmen sie den geometrischen Ort der Punkte die von E: $7x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 7$ den Abstand 1 haben.

Weitere Aufgaben ab Seite 270

Quelle:

- Anschauliche Analytische Geometrie; Elisabeth & Friedrich Barth, Gert Krumbacher; 1993 Ehrenwirth Verlag GmbH München